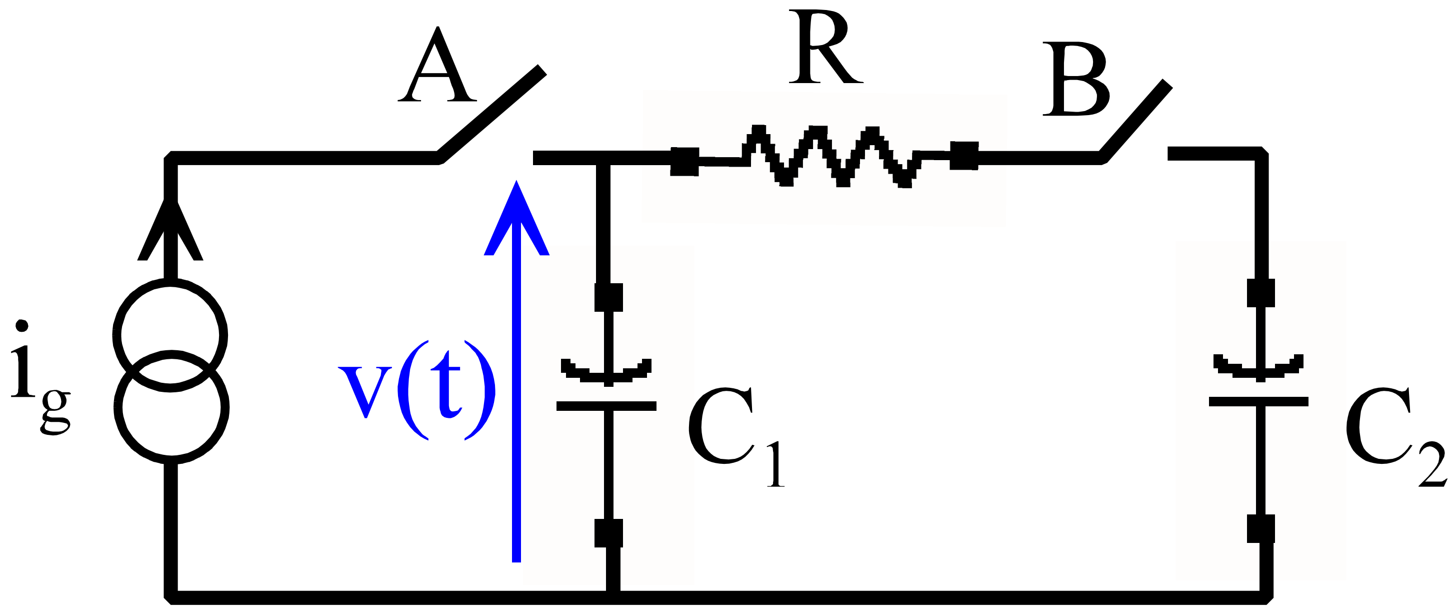
En el circuito de la figura el interruptor A se cierra en t=0 y el interruptor B permanece abierto, estando ambos condensadores inicialmente descargados. Si en t=4 s el interruptor A se abre y el B se cierra, se pide:

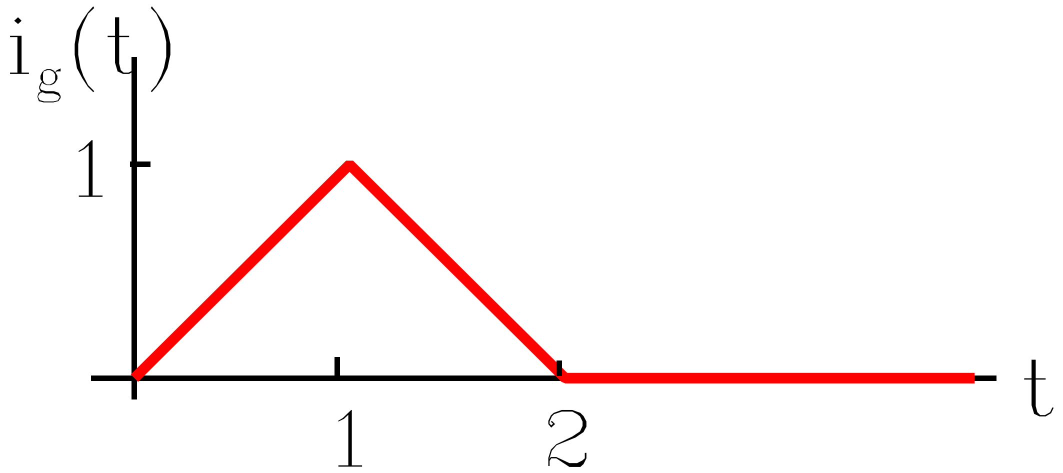
a) Calcular la tensión v(t) en los instantes t=1 s, t=2 s y t=4 s.

b) Obtener la ecuación diferencial que determina el valor de v(t) para t>4 s.

c) Obtener la expresión de v(t) para t>4 s y calcular su valor en t=∞. y

d) Representar la forma de v(t) desde t=0.

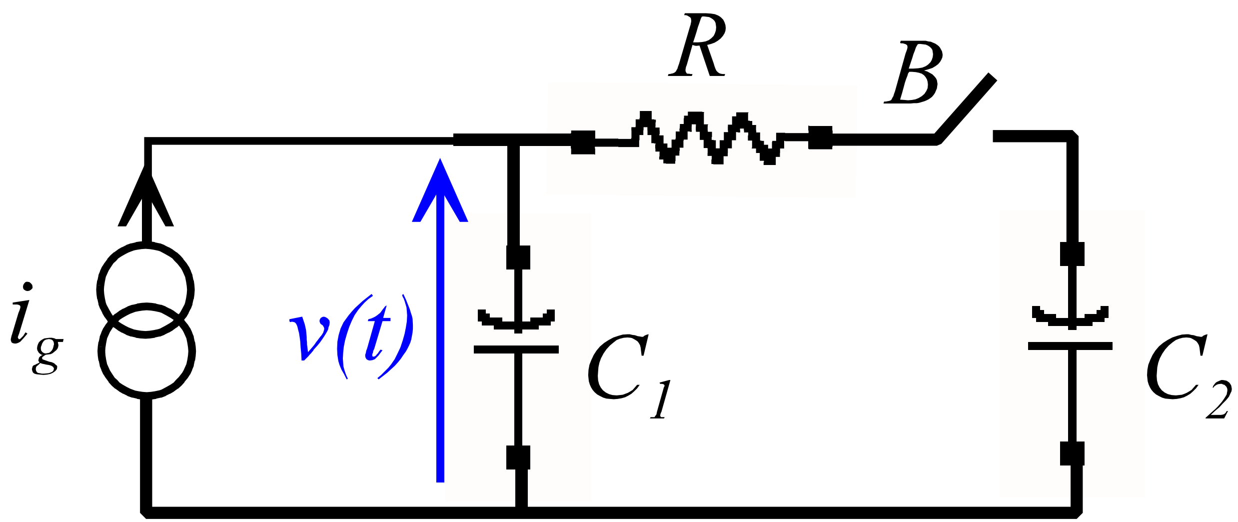

A
R
B
i_g
v(t)
C_1
C_2


$i_g(t)$
1
1
2
t

Escribamos lo primero la expresión matemática del generador

$$i_g(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 1 \\ -t+2 & 1 \le t \le 2 \\ 0 & 2 \le t \end{cases}$$

En el instante t=0 el circuito pasa a ser



y se cumple $$C_1 \frac{dv(t)}{dt} = i_g(t)$$

La solución de la homogénea $C_1 \dfrac{dv(t)}{dt} = 0$ **es** $v(t) = V_0$

y la particular de la completa tiene dos determinaciones, que se obtienen por integración directa

$$C_1 \frac{dv(t)}{dt} = t \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{t^2}{2C_1} \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_1 \frac{dv(t)}{dt} = -t+2 \quad \Rightarrow \quad v(t) = -\frac{t^2}{2C_1} + \frac{2t}{C_1} \qquad 1 \leq t \leq 2$$

La solución completa es entonces

$$v(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2C_1} + V_{01} & 0 \le t \le 1 \\ -\dfrac{t^2}{2C_1} + \dfrac{2t}{C_1} + V_{02} & 1 \le t \le 2 \\ V_{03} & 2 \le t \end{cases}$$

La condición en t=0 permite escribir

$$v(0) = V_{01} = 0$$

y en consecuencia

$$v(1) = \frac{1}{2C_1}$$

con lo que $$-\frac{1}{2C_1}+\frac{2}{C_1}+V_{02} = \frac{1}{2C_1}$$

y por tanto $$V_{02} = -\frac{1}{C_1}$$

teniendose entonces $$v(2) = \frac{1}{C_1}$$

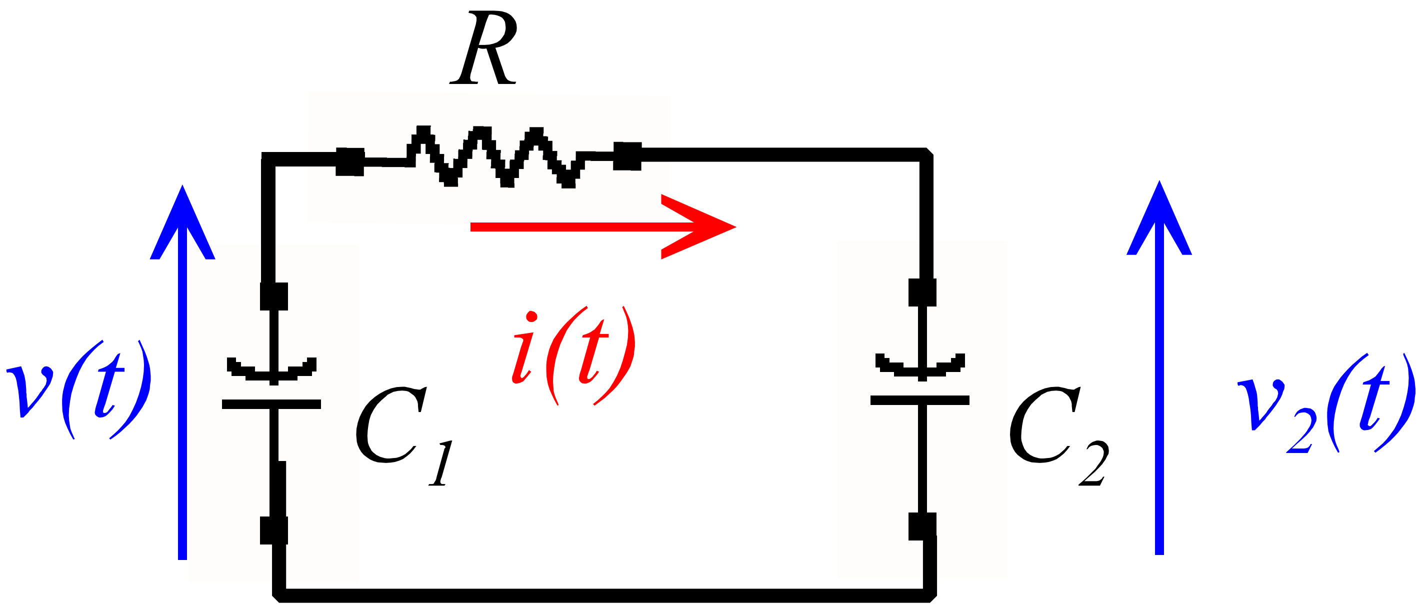
que nos permite escribir $$V_{03} = \frac{1}{C_1}$$

y por tanto $$v(4) = \frac{1}{C_1}$$

Tendremos en resumen

$$\boxed{v(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2C_1} & 0 \leq t \leq 1 \\[2ex] -\dfrac{t^2}{2C_1} + \dfrac{2t}{C_1} - \dfrac{1}{C_1} & 1 \leq t \leq 2 \\[2ex] \dfrac{1}{C_1} & 2 \leq t \end{cases}}$$

A partir de t=4 s el circuito queda



y se cumple

$$\left.\begin{aligned} Ri(t) &= v(t) - v_2(t) \\ i(t) &= -C_1\frac{dv(t)}{dt} = C_2\frac{dv_2(t)}{dt} \end{aligned}\right\}$$

Derivando la primera y usando la segunda se tiene

$$\boxed{\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dv(t)}{dt} = 0} \quad \textbf{con} \quad \tau = R\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

siendo la solución de la forma $v(t) = A + Be^{-\frac{t}{\tau}}$

de donde se puede escribir $i(t) = B\frac{C_1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$

y con ella obtener $v_2(t) = v(t) - Ri(t) = A + B\left(1 - \frac{RC_1}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$

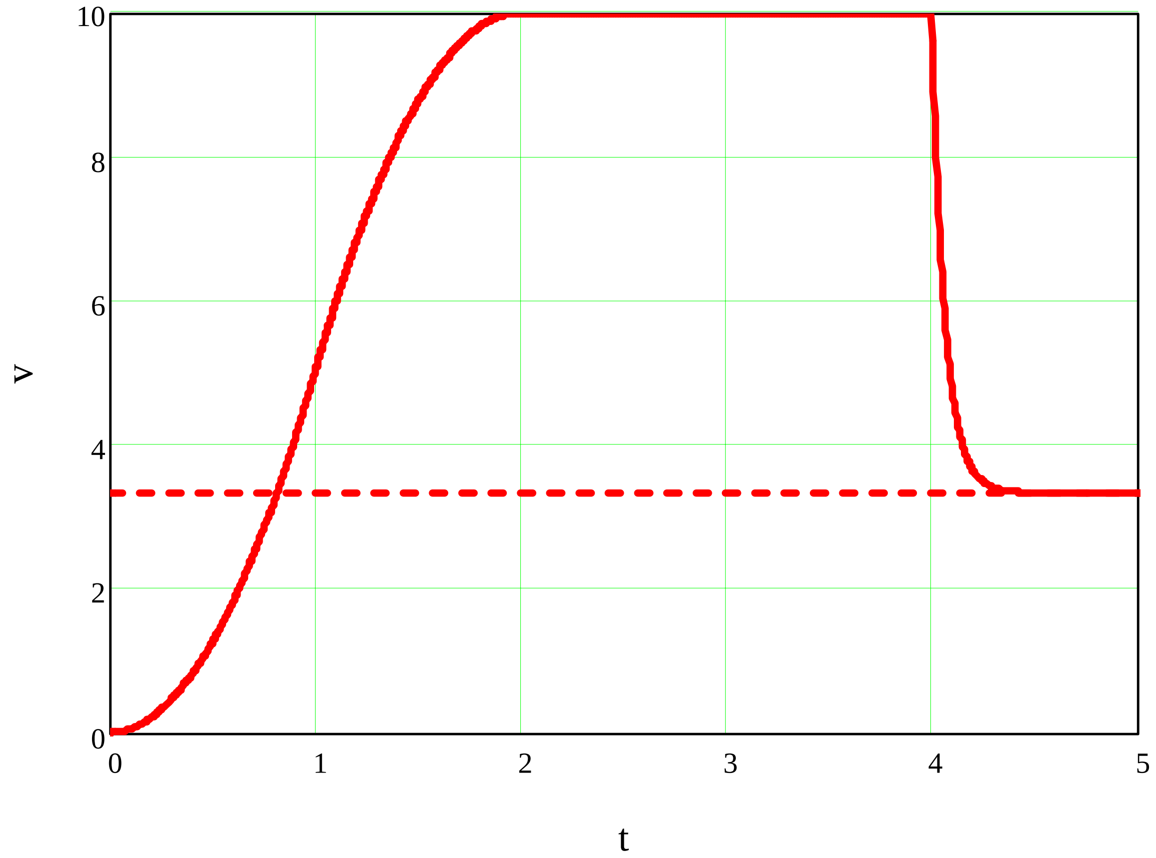
Las condiciones en t=4 s son ahora

$$v(4) = \frac{1}{C_1} \qquad v_2(4) = 0$$

y de ellas se obtiene $$A = \frac{RC_1 - \tau}{RC_1^2} \qquad B = \frac{\tau}{RC_1^2} e^{\frac{4}{\tau}}$$

con lo que $$\boxed{v(t) = \frac{RC_1 - \tau}{RC_1^2} + \frac{\tau}{RC_1^2} e^{-\frac{t-4}{\tau}}}$$ **y** $$\boxed{v(\infty) = \frac{RC_1 - \tau}{RC_1^2}}$$

Una forma típica de la evolución de la tensión(*) (R=1Ω, C_1=1 F, C_2=2 F) es la de la figura



* Naturalmente estos valores son normalizados