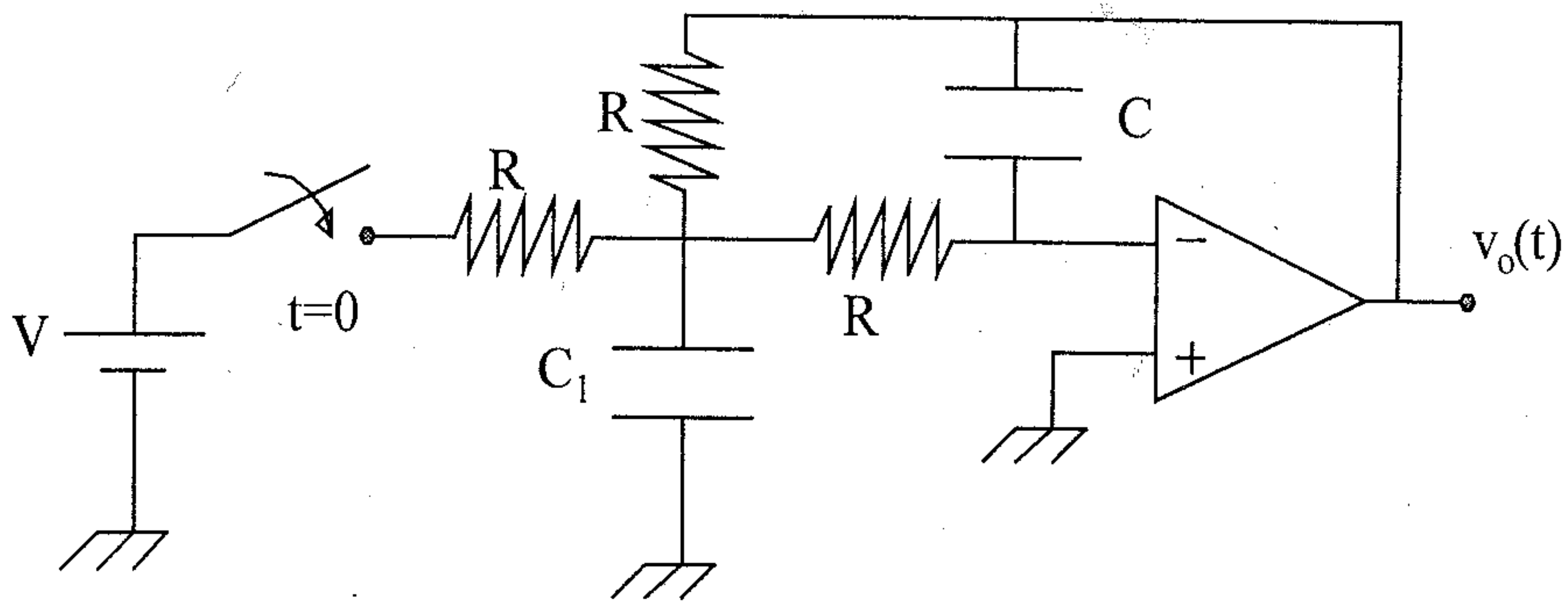
El circuito de la figura se encuentra en reposo en $t<0$. Considerando el operacional se considera ideal, se pide:

a) Obtener la ecuación diferencial que describe el comportamiento del circuito en la variable de tensión $v_o(t)$, para $t \geq 0$.

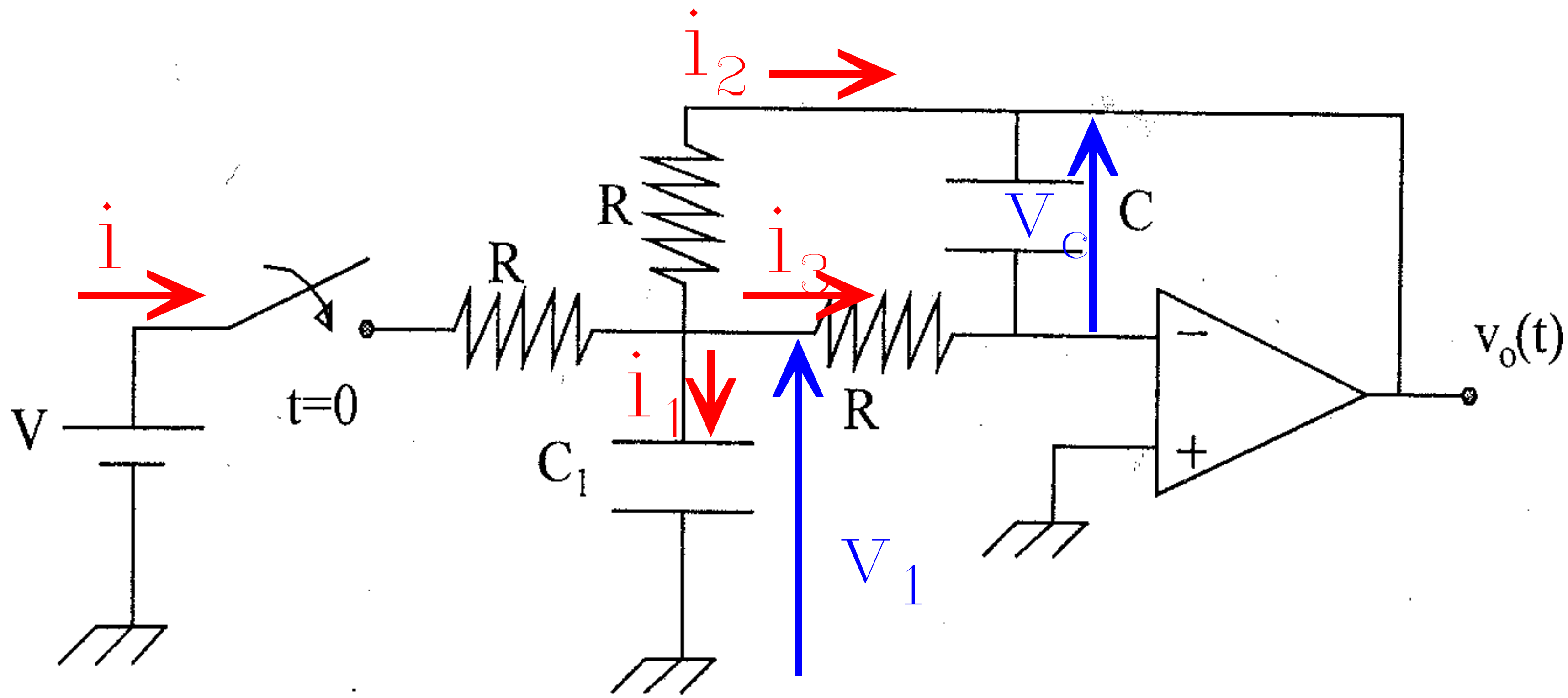
b) calcular los valores de la tensión $v_o(0^+)$ y de su derivada $v'_o(0^+)$, así como el valor final $v_o(\infty)$.

c) Calcular la constante de amortiguamiento y la pulsación propia del circuito. Indicar la forma de la tensión $v_o(t)$ en cualquier instante de tiempo y dibujarla de forma cualitativa para el caso en que $R=1\Omega$, $C=5\mu F$, $C_1=20\mu F$ y $V=10V$.



R
C
R
t=0
V
R
C_1
$v_o(t)$

Puesto que en el operacional $v_-=v_+=0$, se cumple en todo instante que $v_o=v_C$. Buscaremos por tanto una ecuación para v_C.



Después de cerrar el interruptor se tiene

$$V = iR + v_1 \quad \textbf{siendo} \quad i = i_1 + i_2 + i_3$$

pero $$i_1 = C_1 \frac{dv_1}{dt}$$ **y como v$_-$=0** $$i_3 = \frac{v_1}{R}$$

Por otra parte $$i_2 = \frac{v_1 - v_C}{R}$$

con lo que $$i = C_1 \frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1 - v_C}{R} + \frac{v_1}{R}$$

y en resumen $$RC_1 \frac{dv_1}{dt} + 3v_1 - v_C = V$$

Finalmente teniendo en cuenta que $i_3 = -C\frac{dv_C}{dt}$

se tiene $v_1 = -RC\frac{dv_C}{dt}$

y por tanto que se cumple

$$\boxed{\frac{d^2v_o}{dt^2} + \frac{3}{RC_1}\frac{dv_o}{dt} + \frac{1}{R^2CC_1}v_o = -\frac{V}{R^2CC_1}}$$

La tensión de salida en 0$^+$ coincide con la existente en C en 0$^-$, que es nula, por lo que

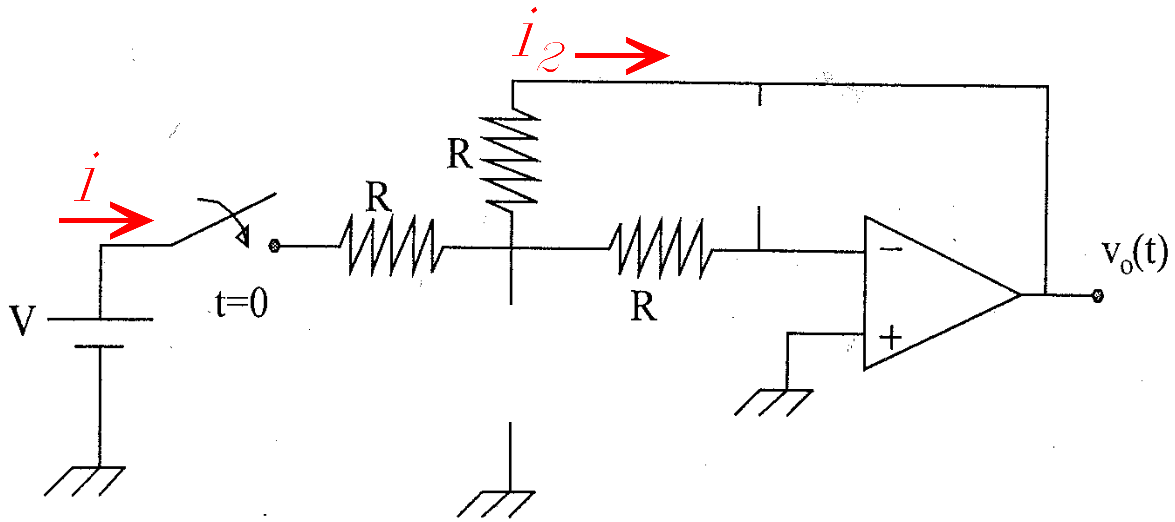
$$\boxed{v_o(0^+) = 0}$$

Por otra parte $$\frac{dv_o(t)}{dt} = \frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{v_1(t)}{RC}$$

y como $$v_1(0^+) = 0 \Rightarrow \boxed{v_o'(0^+) = 0}$$

En el estado final los condensadores son circuitos abiertos y la corriente i_3 se anula, con lo que se cumple $i = i_2 = \dfrac{V}{R}$

y como $v_o = -Ri_2$ **se tiene** $\boxed{v_o(\infty) = -V}$



La ecuación característica es $$r^2 + \frac{3}{RC_1} r + \frac{1}{R^2CC_1} = 0$$

y por tanto $$\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{CC_1}}$$

y como $$2\alpha\omega_0 = \frac{3}{RC_1} \qquad \alpha = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{C}{C_1}}$$

Las raíces son $$r_\pm = -\frac{3}{2RC_1} \pm \sqrt{\frac{9}{4R^2C_1^2} - \frac{1}{R^2CC_1}}$$

que para los valores del enunciado son complejas conjugadas.

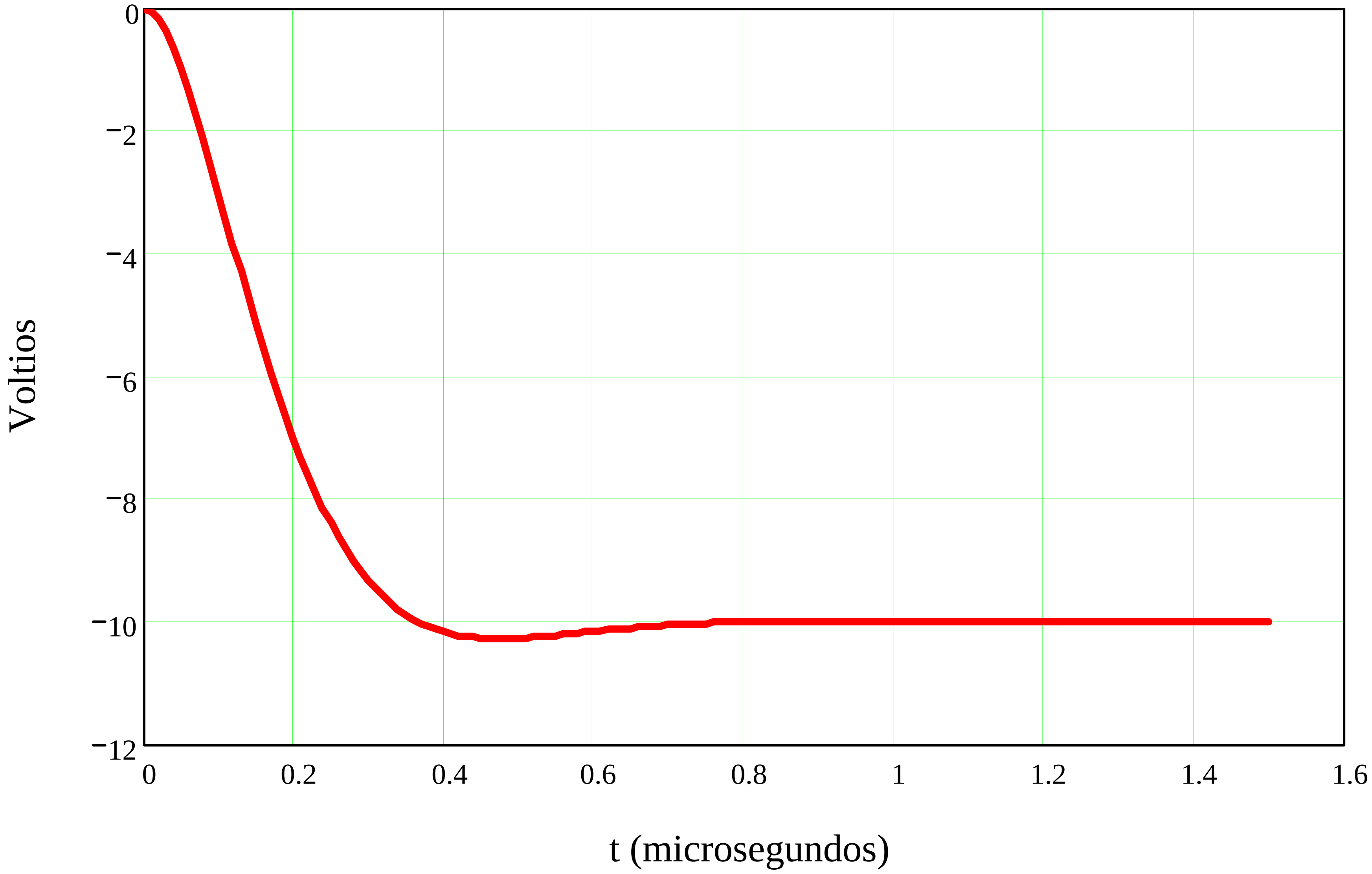
La solución de la ecuación es

$$v_o(t) = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t} - V$$

y con las condiciones $\quad v_o(0^+) = 0 \qquad v_o^{/}(0^+) = 0$

se obtienen $\quad A = V\dfrac{r_-}{r_+ - r_-} \qquad B = -V\dfrac{r_+}{r_+ - r_-}$

La salida es por tanto oscilatoria amortiguada, sale de 0 en t=0 y tiende a -V para valores grandes de t. Con los valores numéricos del enunciado resulta ser


0
−2
−4
−6
−8
−10
−12
Voltios
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
t (microsegundos)