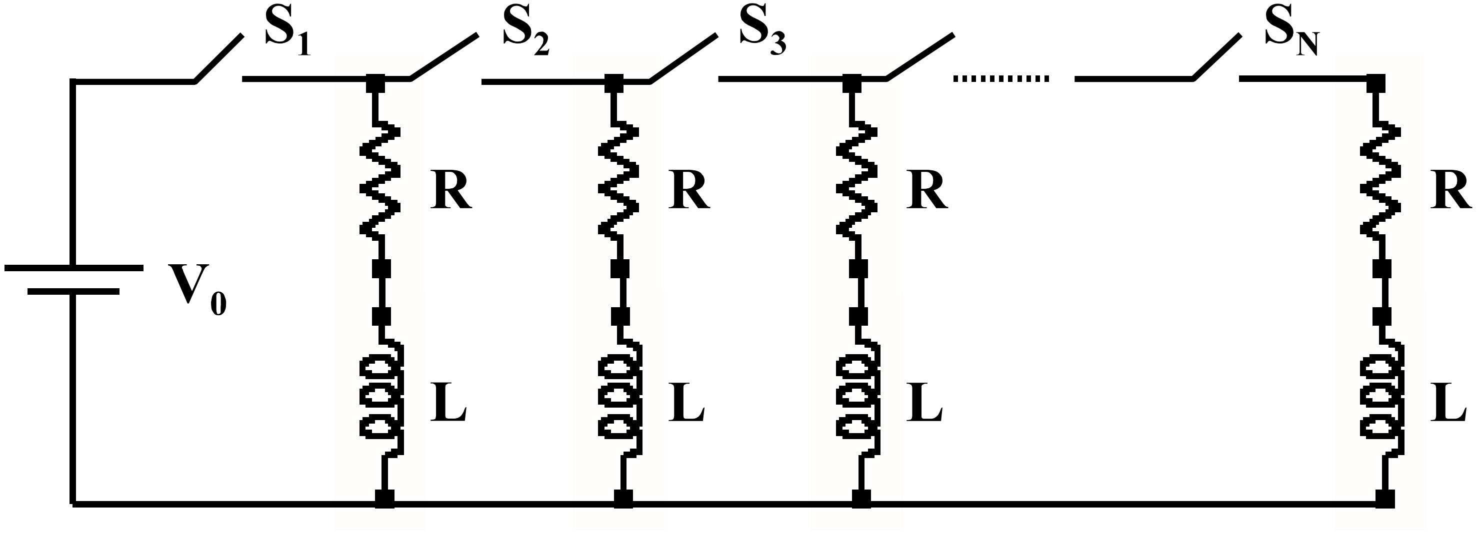
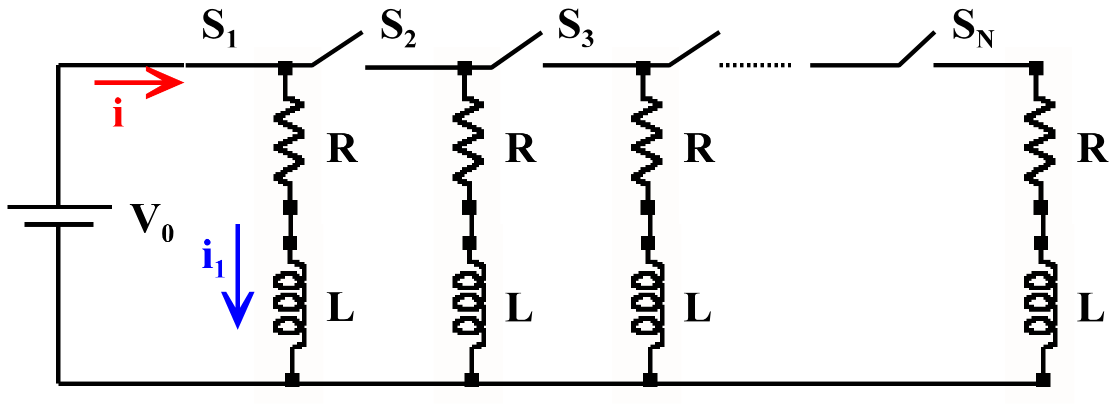
El circuito de la figura se encuentra en reposo con todos los interruptores abiertos. En el instante $t=0$ se cierra el primer interruptor, en $t=T_0$ el segundo, en $t=2T_0$ el tercero y así sucesivamente. Calcule en función del tiempo a) La tensión en cada una de las resistencias, b) La corriente total suministrada por la batería. Haga un dibujo esquemático de los resultados.

Suponga que $N=2$ y que en $t=2T_0$ se abre el interruptor S1 ¿Cuanto vale la corriente en cada inductancia en $t=3T_0$?



Inicialmente la corriente en todas las inductancias es nula. En t=0 se cierra S_1 y el circuito queda



y por la ley de Kirchhoff de tensiones se cumple

$$L\frac{di_1}{dt} + Ri_1 = V_0$$

que tiene como solución $$i_1(t) = A_1 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{R}$$

que debe anularse en t=0, lo que obliga a que $$A_1 = -\frac{V_0}{R}$$

y en resumen $$i_1(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \qquad t \in [0, T_0]$$

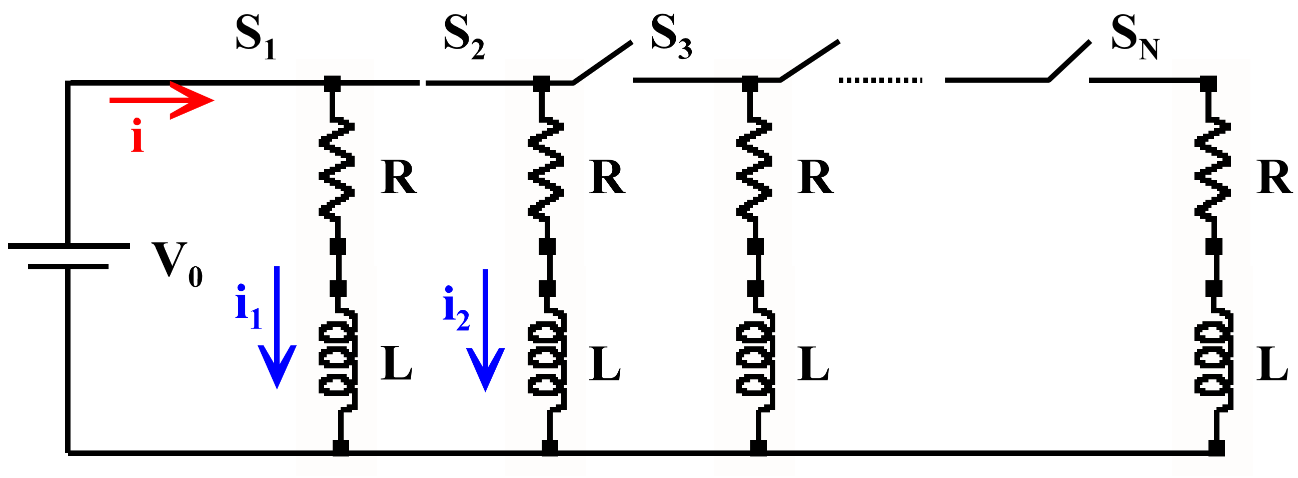
Con esto se tiene

$$i(t) = i_1(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \qquad t \in [0, T_0]$$

$$V_R(t) = Ri_1(t) = V_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \qquad t \in [0, T_0]$$

siendo $$i_1(T_0) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}T_0}\right) \qquad t \in [0, T_0]$$

En t=T_0 se cierra S_2 y el circuito pasa a ser



donde las corrientes serán distintas de las anteriores, debiendose cumplir

$$L\frac{di_1}{dt}+Ri_1 = V_0 \qquad\qquad L\frac{di_2}{dt}+Ri_2 = V_0$$

Es inmediato comprobar que la solución de la primera con la condición de continuidad de la corriente en T_0 conduce a

$$i_1(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \qquad t\in[T_0,2T_0]$$

es decir que la corriente $i_1(t)$ mantiene su forma analítica. Por otra parte la solución para $i_1(t)$ es idéntica a la obtenida para $i_1(t)$, pero el valor inicial ha de tomarse ahora en $t=T_0$, teniendose entonces

$$i_2(t) = \frac{V_0}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}(t-T_0)}\right] \qquad t\in[T_0,2T_0]$$

y por tanto

$$i(t) = i_1(t)+i_2(t) = \frac{V_0}{R}\left[2 - e^{-\frac{R}{L}t} - e^{-\frac{R}{L}(t-T_0)}\right] \qquad t\in[T_0,2T_0]$$

Primera R $$V_R(t) = Ri_1(t) = V_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \qquad t\in[T_0,2T_0]$$

Segunda R $$V_R(t) = Ri_2(t) = V_0\left[1-e^{-\frac{R}{L}(t-T_0)}\right] \qquad t\in[T_0,2T_0]$$

Iterando este proceso es fácil encontrar que al cerrar S_n se tendrá

$$i(t) = i_1(t)+i_2(t)+\ldots+i_n(t) = \frac{V_0}{R}\left\{n-e^{-\frac{R}{L}t}-e^{-\frac{R}{L}(t-T_0)}-\ldots-e^{-\frac{R}{L}[t-(n-1)T_0]}\right\} \quad t\in[(n-1)T_0,nT_0]$$

Primera R

$$V_R(t) = Ri_1(t) = V_0\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right) \qquad t\in[(n-1)T_0,nT_0]$$

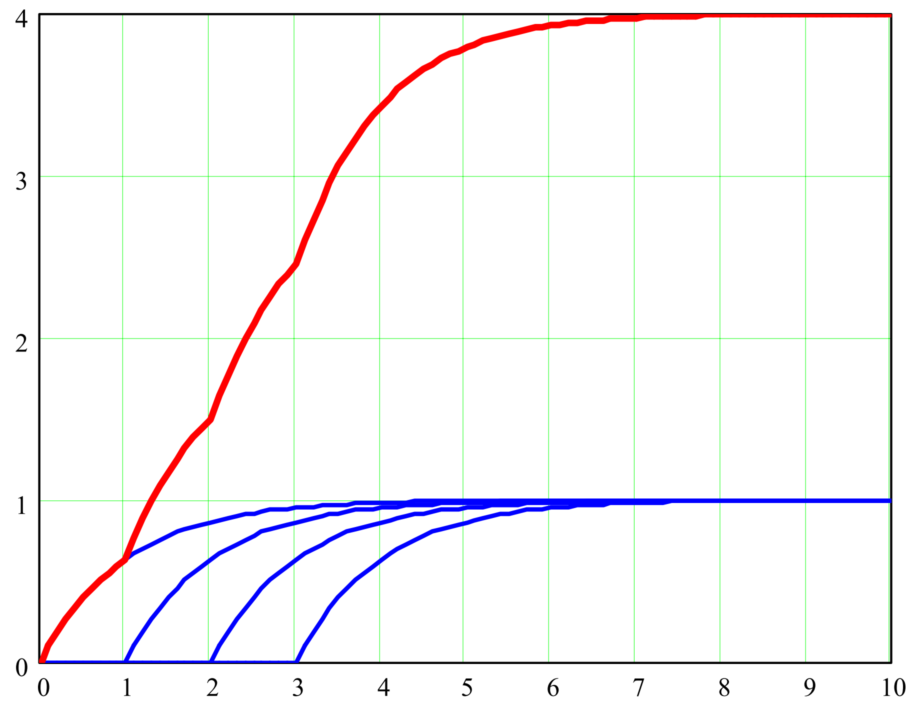
Segunda R

$$V_R(t) = Ri_2(t) = V_0\left[1-e^{-\frac{R}{L}(t-T_0)}\right] \qquad t\in[(n-1)T_0,nT_0]$$

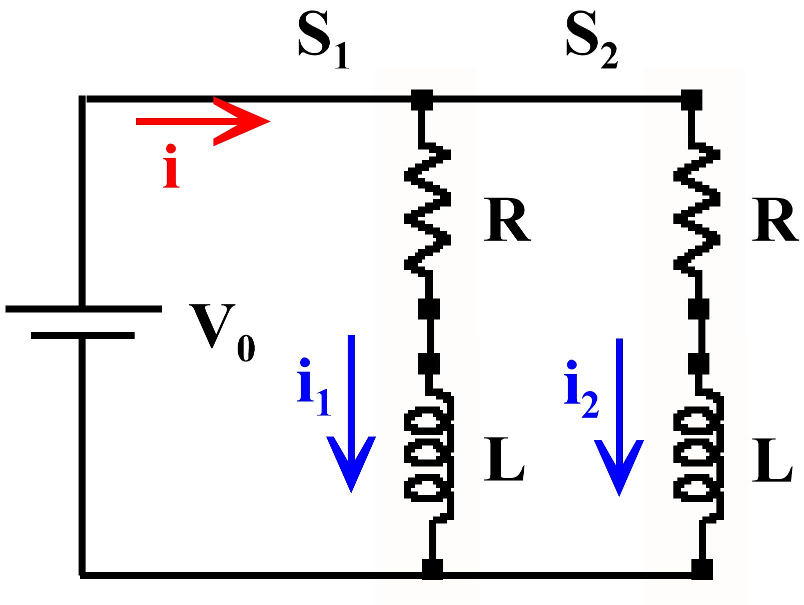
n-esima R

$$V_R(t) = Ri_n(t) = V_0\left\{1-e^{-\frac{R}{L}[t-(n-1)T_0]}\right\} \qquad t\in[(n-1)T_0, nT_0]$$

La representación gráfica de la corriente y las tensiones es, para el caso de 4 interruptores, la siguiente



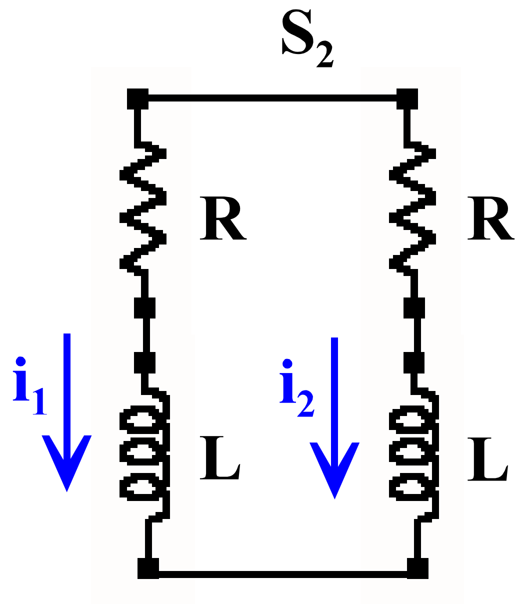
Para N=2 el circuito es



y en $t=2T_0^-$ las corrientes valen

$$i_1(2T_0^-) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}2T_0}\right) \qquad i_2(2T_0^-) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}T_0}\right)$$

Al abrir S_1 el circuito queda



debiendo ser $i_2(t)=-i_1(t)$ para todo valor de t, luego en $t=2T_0^+$ ha de cumplirse

$$i_2(2T_0^+) \;=\; -\,i_1(2T_0^+)$$

y estamos ante un caso típico de variación brusca de corriente en las bobinas.

Escribiendo la conservación del flujo se tendrá

$$L_1 i_1(2T_0^-) - L_2 i_2(2T_0^-) = L_1 i_1(2T_0^+) - L_2 i_2(2T_0^+)$$

y con

$$i_2(2T_0^+) = -\, i_1(2T_0^+)$$

se obtiene

$$i_1(2T_0^+) = -\, i_2(2T_0^+) = \frac{L_1 i_1(2T_0^-) - L_2 i_2(2T_0^-)}{L_1 + L_2} = \frac{V_0}{R} \frac{L_1\left(1 - e^{-\frac{R}{L}2T_0}\right) - L_2\left(1 - e^{-\frac{R}{L}T_0}\right)}{L_1 + L_2}$$

que para L_1=L_2=L se reduce a

$$i_1(2T_0^+) = -\, i_2(2T_0^+) = \frac{V_0}{2R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}T_0}\right) e^{-\frac{R}{L}T_0}$$

Por otra parte se puede escribir para la malla

$$L\frac{di_1}{dt} + Ri_1 = 0$$

cuya solución es

$$i_1(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

y aplicando la condición en t=2T$_0^+$

$$Ae^{-\frac{R}{L}2T_0} = \frac{V_0}{2R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}T_0}\right)e^{-\frac{R}{L}T_0}$$

de donde

$$A = \frac{V_0}{2R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}T_0}\right)e^{\frac{R}{L}T_0}$$

y en resumen

$$i_1(t) = -i_2(t) = \frac{V_0}{2R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}T_0}\right)e^{-\frac{R}{L}(t-T_0)} \qquad t>2T_0$$

que en $t=3T_0$ queda

$$i_1(3T_0) = -i_2(3T_0) = \frac{V_0}{2R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}T_0}\right)e^{-\frac{R}{L}2T_0}$$