En el circuito de la figura se pide hallar:

a) La función de transferencia, definida como la relación V_s/V_e, en régimen permanente sinusoidal.

b) La pulsación de resonancia y el ancho de banda, a partir de dicha función de transferencia, y,

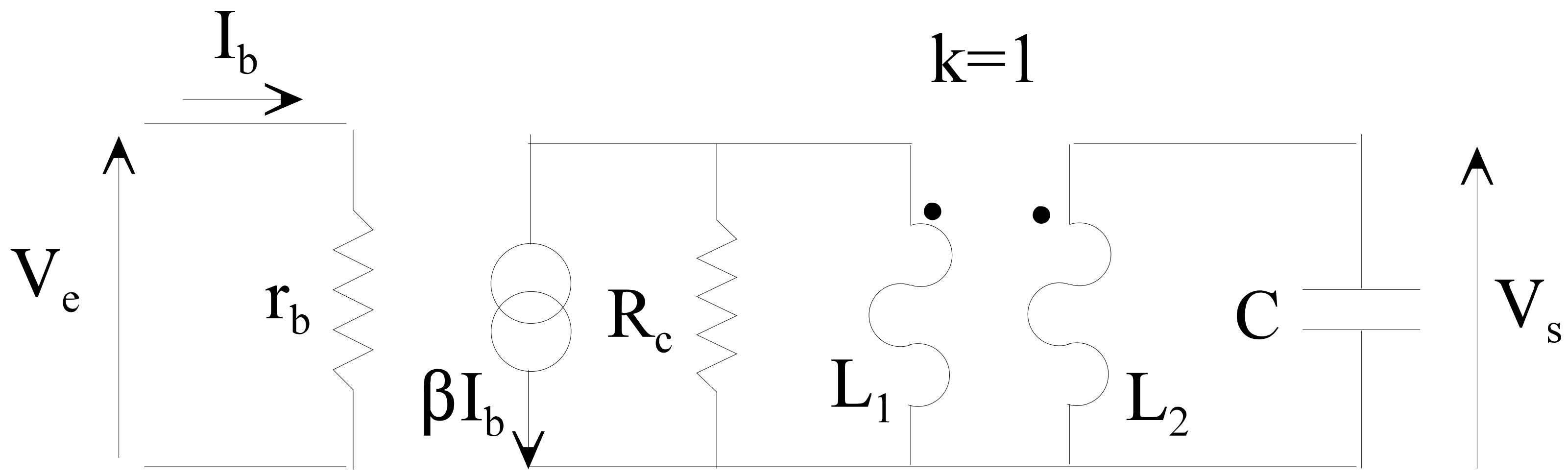
a la frecuencia de resonancia:

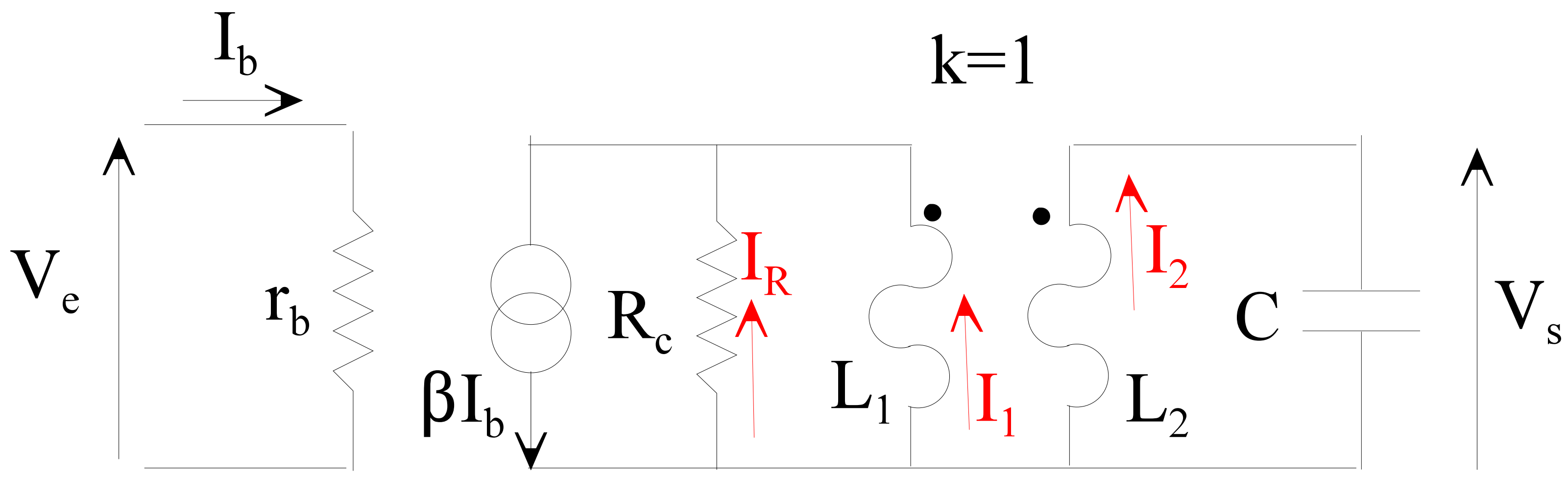
c) La potencia disipada en R_c

d) La energía almacenada en C

e) La energía almacenada en las bobinas acopladas.

f) El Q del circuito.





Para las corrientes de la figura se cumple

$$I_R + I_1 = \beta I_b = \frac{\beta}{r_b} V_e$$

Por otra parte la caída de tensión en R_c permite escribir

$$R_c I_R = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \quad \textbf{con} \qquad M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

y la caída de tensión en C

$$-I_2 \frac{1}{j\omega C} = j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1$$

con lo que tenemos un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -R_c & j\omega L_1 & j\omega M \\ 0 & j\omega M & j\omega L_2 + \dfrac{1}{j\omega C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_R \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \beta \frac{V_e}{r_b} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

del que se puede despejar I_2 obteniendose

$$I_2 = \beta \frac{V_e}{r_b} \frac{-j\omega M R_c}{\Delta}$$

con $$\Delta = \omega^2(M^2 - L_1 L_2) + \frac{L_1}{C} + R_c\left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}\right)$$

y como en nuestro caso $k = 1 \quad \rightarrow \quad M = \sqrt{L_1 L_2}$

y $$\Delta = \frac{L_1}{C} + R_c\left(j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C}\right)$$

Teniendo en cuenta que $V_s = I_2 \frac{1}{j\omega C}$ se tiene finalmente

$$\boxed{\frac{V_s}{V_e} = -\beta\frac{R_c}{r_b}\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\frac{j\omega}{-\omega^2 R_c C + \frac{R_c}{L_2} + j\omega\frac{L_1}{L_2}}}$$

El módulo de esta función de transferencia es

$$\left|\frac{V_s}{V_e}\right| = |\beta|\frac{R_c}{r_b}\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\frac{\omega}{\sqrt{\left(-\omega^2 R_c C + \frac{R_c}{L_2}\right)^2 + \left(\omega\frac{L_1}{L_2}\right)^2}}$$

y hemos de calcular el valor de la pulsación que lo hace máximo. Si bien es posible, aunque laborioso, hacerlo de forma directa, es preferible usar la función inversa

$$\frac{V_e}{V_s} = -\frac{1}{\beta}\frac{r_b}{R_c}\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\left(\frac{L_1}{L_2} + j\omega R_c C + \frac{R_c}{j\omega L_2}\right)$$

cuya forma matemática coincide con la de la impedancia de un circuito resonante serie, y cuyo módulo, como ya sabemos, se hace mínimo, y el de la función original máximo, cuando la parte imaginaria se anula, es decir para

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}}}$$

De forma análoga el ancho de banda se puede escribir directamente por comparación con el de una resonancia serie, siendo su valor

$$\Delta\omega = \frac{L_1}{R_c}\omega_0^2 = \frac{L_1}{L_2}\frac{1}{R_c C}$$ y el fraccional $$\boxed{\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{L_1}{R_C}\omega_0 = \frac{L_1}{R_c\sqrt{L_2 C}}}$$

Finalmente el Q propio de la función de transferencia será, a la frecuencia de resonancia

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$ es decir $$\boxed{Q_0 = R_c\frac{\sqrt{L_2 C}}{L_1}}$$

Analicemos los aspectos energéticos. La corriente I_R que circula por R_c se obtiene del mismo sistema que I_2 y está dada por

$$I_R = \beta \frac{V_e}{r_b} \frac{j\omega L_1}{R_c(1-\omega^2 L_2 C)+j\omega L_1}$$

y a la frecuencia de resonancia

$$I_R = \beta \frac{V_e}{r_b}$$

con lo que la potencia media disipada en R_c vale, a dicha frecuencia

$$\boxed{<W_{disR_c}> = \frac{1}{2}\beta^2 \frac{|V_e|^2}{r_b^2} R_c}$$

La energía instantánea almacenada en C esta dada, a la frecuencia de resonancia por

$$W_C(t) = \frac{1}{4} C |V_s|^2 \left[\cos(2\omega_0 t + 2\varphi_{V_s}) + 1\right]$$

siendo
$$V_s = -\beta \frac{R_c}{r_b} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} V_e$$

y por tanto
$$|V_s| = |\beta| \frac{R_c}{r_b} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} |V_e| \qquad \varphi_{V_s} = \varphi_{V_e} - \pi$$

con lo que
$$\boxed{W_C(t) = \frac{1}{4} \beta^2 \frac{R_c^2}{r_b^2} \frac{L_2}{L_1} C |V_e|^2 \left[\cos(2\omega_0 t + 2\varphi_{V_e}) + 1\right]}$$

siendo su valor máximo

$$\boxed{W_C\Big|_{Max} = \frac{1}{2}\beta^2 \frac{R_c^2}{r_b^2}\frac{L_2}{L_1} C |V_e|^2}$$

y su valor medio

$$\boxed{\langle W_C \rangle = \frac{1}{4}\beta^2 \frac{R_c^2}{r_b^2}\frac{L_2}{L_1} C |V_e|^2}$$

La energía instantánea almacenada en un par de bobinas acopladas esta dada por

$$W_{L_1L_2M}(t) \; = \; \frac{1}{2}i_1^2(t)L_1 + \frac{1}{2}i_2^2(t)L_2 + i_1(t)i_2(t)M$$

o bien en función de los fasores de las corrientes

$$W_{L_1L_2M}(t) \; = \; \frac{1}{4}|I_1|^2L_1[\cos(2\omega t + 2\varphi_{I_1}) + 1] +$$

$$+\frac{1}{4}|I_2|^2L_2[\cos(2\omega t + 2\varphi_{I_2}) + 1] +$$

$$+\frac{1}{2}|I_1|\,|I_2|L_1\left\{\cos[2\omega t + (\varphi_{I_1} + \varphi_{I_2})] + 1\right\}$$

A la frecuencia de resonancia $I_R = \beta \frac{V_e}{r_b}$ coincide con la corriente suministrada por el generador de corriente dependiente y por tanto $I_1 = 0$

y como
$$I_2 = -j\beta \frac{V_e}{r_b} R_c \sqrt{\frac{C}{L_1}}$$

le energía instantánea almacenada en las bobinas acopladas vale

$$\boxed{W_{L_1L_2M}(t) = \frac{1}{4}\beta^2 \frac{R_c^2}{r_b^2}\frac{L_2}{L_1} C |V_e|^2 \left[\cos(2\omega_0 t + 2\varphi_{V_e} \pm 2\frac{\pi}{2}) + 1\right]}$$

siendo su valor máximo

$$\boxed{W_{L_1L_2M}\big|_{Max} = \frac{1}{2}\beta^2 \frac{R_c^2}{r_b^2}\frac{L_2}{L_1} C |V_e|^2}$$

y su valor medio $$\boxed{\langle W_{L_1L_2M}\rangle = \frac{1}{4}\beta^2\frac{R_c^2}{r_b^2}\frac{L_2}{L_1}C|V_e|^2}$$

Calculemos la energía total instantánea almacenada a la frecuencia de resonancia

$$W_{LC}(t) = W_C(t) + W_{L_1L_2M}(t) = \frac{1}{2}\beta^2\frac{R_c^2}{r_b^2}\frac{L_2}{L_1}C|V_e|^2$$

que como vemos es independiente de t, luego su valor máximo es el mismo.

Podemos ahora calcular directamente el Q a la frecuencia de resonancia aplicando la definición $Q_0 = \omega_0 \frac{W_{LC}|_{Max}}{<W_{dis}>}$

Si usamos la potencia disipada en R_c obtenemos

$$Q_0 = R_c \frac{\sqrt{L_2 C}}{L_1}$$

que coincide con el calculado previamente. Pero si incorporamos la disipación que se produce en r_b obtenemos

$$Q_c = \frac{R_c \frac{\sqrt{L_2 C}}{L_1}}{1 + \frac{r_b}{\beta^2 R_c}}$$

que puede interpretarse como el Q cargado para un Q externo de valor

$$Q_e = \frac{R_c \frac{\sqrt{L_2 C}}{L_1}}{\frac{r_b}{\beta^2 R_c}}$$