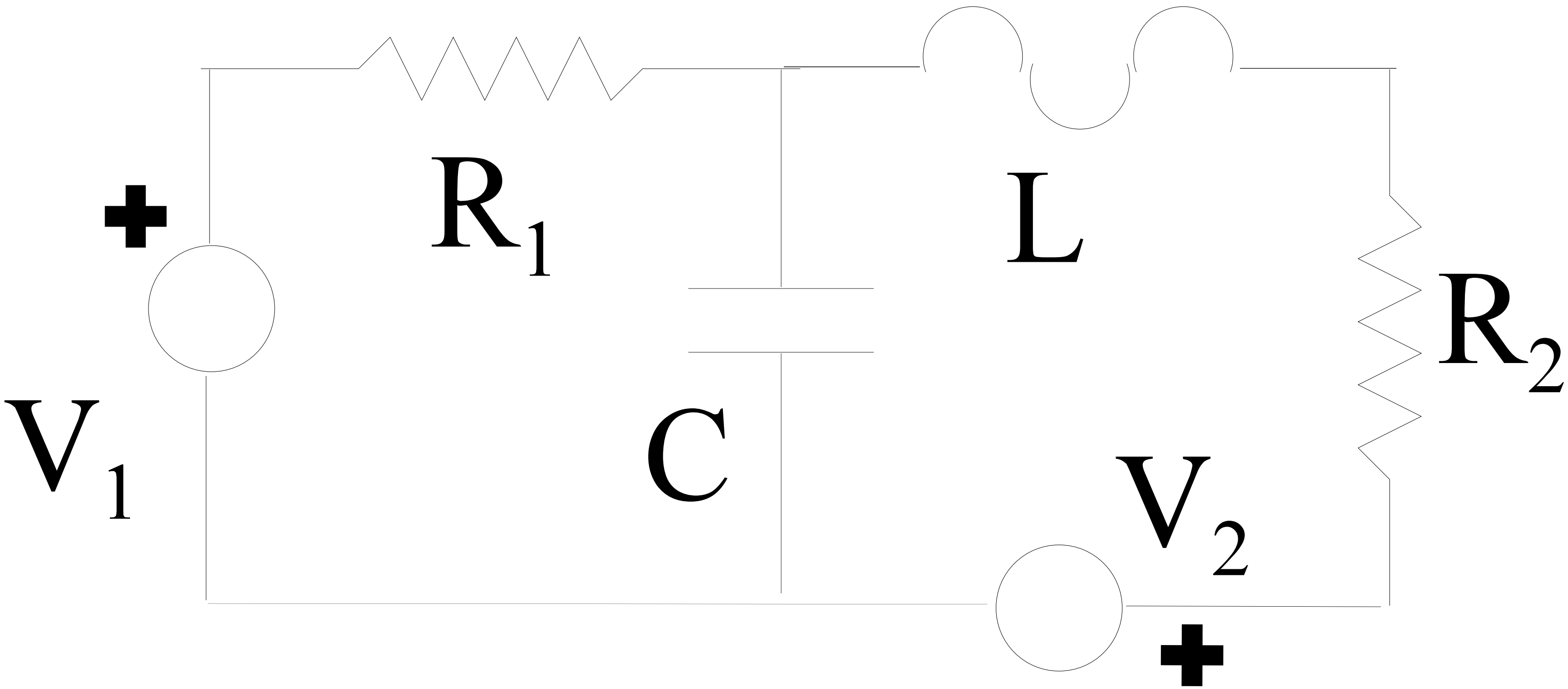
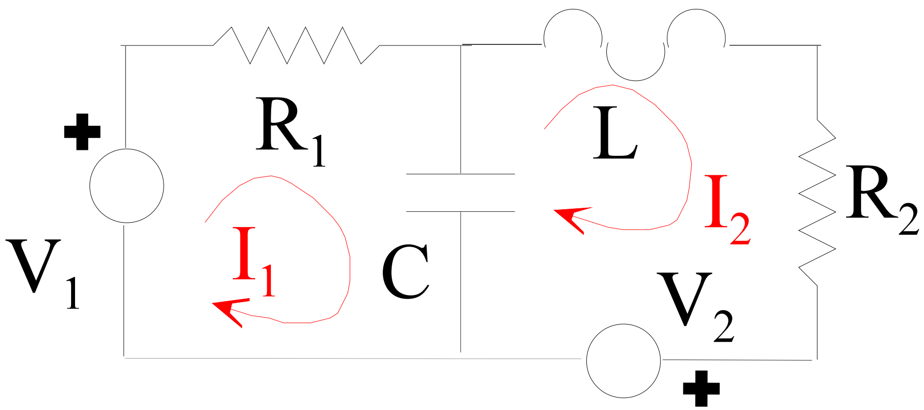
En el circuito de la figura analice la disipación de potencia que se produce en la resistencia R_1 para los siguientes casos: a) $\omega_1=\omega_2$, b) $\omega_1 \neq \omega_2$ y c) $\omega_1=\omega_2=0$, siendo ω_1 la pulsación del generador de fasor V_1 y ω_2 la pulsación del generador de fasor V_2.



Utilizaremos el método de superposición, obteniendo, en el dominio de la frecuencia, el efecto de la aplicación de cada generador por separado. Resolviendo por mallas, con las corrientes girando a derechas



se tiene, para el generador de fasor V_1

$$\begin{pmatrix} R_1+\dfrac{1}{j\omega_1 C} & -\dfrac{1}{j\omega_1 C} \\ -\dfrac{1}{j\omega_1 C} & R_2+j\omega_1 L+\dfrac{1}{j\omega_1 C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con lo que $I_1(\omega_1) = \dfrac{\begin{vmatrix} V_1 & -\dfrac{1}{j\omega_1 C} \\ 0 & R_2+j\omega_1 L+\dfrac{1}{j\omega_1 C} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+\dfrac{1}{j\omega_1 C} & -\dfrac{1}{j\omega_1 C} \\ -\dfrac{1}{j\omega_1 C} & R_2+j\omega_1 L+\dfrac{1}{j\omega_1 C} \end{vmatrix}} = Y_{11}(\omega_1)V_1$

con $Y_{11}(\omega_1) = \left(R_2+j\omega_1 L+\dfrac{1}{j\omega_1 C}\right)\dfrac{1}{\Delta(\omega_1)}$

Para el generador de fasor V$_2$ se tendrá

$$\begin{pmatrix} R_1 + \dfrac{1}{j\omega_2 C} & -\dfrac{1}{j\omega_2 C} \\ -\dfrac{1}{j\omega_2 C} & R_2 + j\omega_2 L + \dfrac{1}{j\omega_2 C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -V_2 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$I_1(\omega_2) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{1}{j\omega_2 C} \\ -V_2 & R_2 + j\omega_2 L + \dfrac{1}{j\omega_2 C} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + \dfrac{1}{j\omega_2 C} & -\dfrac{1}{j\omega_2 C} \\ -\dfrac{1}{j\omega_2 C} & R_2 + j\omega_2 L + \dfrac{1}{j\omega_2 C} \end{vmatrix}} = -Y_{12}(\omega_2) V_2$$

con $$Y_{12}(\omega_2) = \frac{1}{j\omega_2 C}\frac{1}{\Delta(\omega_2)}$$

siendo $$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} R_1 + \dfrac{1}{j\omega C} & -\dfrac{1}{j\omega C} \\ -\dfrac{1}{j\omega C} & R_2 + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C} \end{vmatrix}$$

con $\omega=\omega_1$ **o bien** $\omega=\omega_2$

Para el caso de dos generadores de la misma frecuencia

$$\omega_1=\omega_2=\omega_0$$

el problema es sinusoidal puro y se obtendrá el fasor total directamente

$$I_1(\omega_0) = Y_{11}(\omega_0)V_1 - Y_{12}(\omega_0)V_2$$

siendo la potencia media disipada en R_1

$$\boxed{<P_d> = \frac{1}{2} I_1(\omega_0) I_1^*(\omega_0) R_1 = \frac{1}{2} |Y_{11}(\omega_0)V_1 - Y_{12}(\omega_0)V_2|^2 R_1}$$

Tomemos $\quad Y_{11}(\omega_0)V_1 = a_1 + jb_1 \qquad -Y_{12}(\omega_0)V_2 = a_2 + jb_2$

y se tendrá $$<P_d> = \frac{1}{2}\left[(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2\right]R_1$$

mientras que las disipaciones medias correspondientes a cada generador serían

$$\begin{cases} <P_{d1}> = \dfrac{1}{2}|Y_{11}(\omega_0)V_1|^2 R_1 = \dfrac{1}{2}(a_1^2+b_1^2)R_1 \\ <P_{d2}> = \dfrac{1}{2}|Y_{12}(\omega_0)V_2|^2 R_1 = \dfrac{1}{2}(a_2^2+b_2^2)R_1 \end{cases}$$

Es evidente que $<P_d> \neq <P_{d1}>+<P_{d2}>$ **es decir que** **la potencia disipada media total NO ES la suma de las que se disiparían con cada generador por separado.**

Para el caso de dos generadores de distinta frecuencia se tendrá

Generador de ω_1 $$I_1(\omega_1) = Y_{11}(\omega_1)V_1$$

Generador de ω_2 $$I_1(\omega_2) = -Y_{12}(\omega_2)V_2$$

que se escriben en el dominio del tiempo en la forma[1]

$$i_{11}(t) = Re\left|Y_{11}(\omega_1)V_1e^{j\omega_1 t} \qquad i_{12}(t) = -Re\right|Y_{12}(\omega_2)V_2e^{j\omega_2 t}$$

y superponiendo

$$i_1(t) = Re\left|Y_{11}(\omega_1)V_1e^{j\omega_1 t} - Re\right|Y_{12}(\omega_2)V_2e^{j\omega_2 t}$$

---

1) La superposición de fasores correspondientes a frecuencias distintas carece de significado

con lo que la **potencia instantánea disipada en R_1** vale

$$\boxed{p_d(t) = \left(Re\left|Y_{11}(\omega_1)V_1 e^{j\omega_1 t} - Re\right|Y_{12}(\omega_2)V_2 e^{j\omega_2 t}\right)^2 R_1}$$

y dado que las disipaciones instantáneas producidas por cada generador por separado serían

$$p_{d1}(t) = \left(Re\left|Y_{11}(\omega_1)V_1 e^{j\omega_1 t}\right.\right)^2 R_1 \qquad p_{d2}(t) = \left(Re\left|Y_{12}(\omega_2)V_2 e^{j\omega_2 t}\right.\right)^2 R_1$$

se tendrá que $\quad p_d(t) \neq p_{d1}(t) + p_{d2}(t)$

la potencia disipada instantánea total NO ES la suma de las que se disiparían con cada generador por separado.

Puesto que la corriente $i_1(t)$ no es, en general, una función periódica, no es posible definir el valor medio en un periodo de la potencia disipada. Solo en el supuesto de que el cociente entre ω_1 y ω_2 pueda escribirse como un cociente de enteros

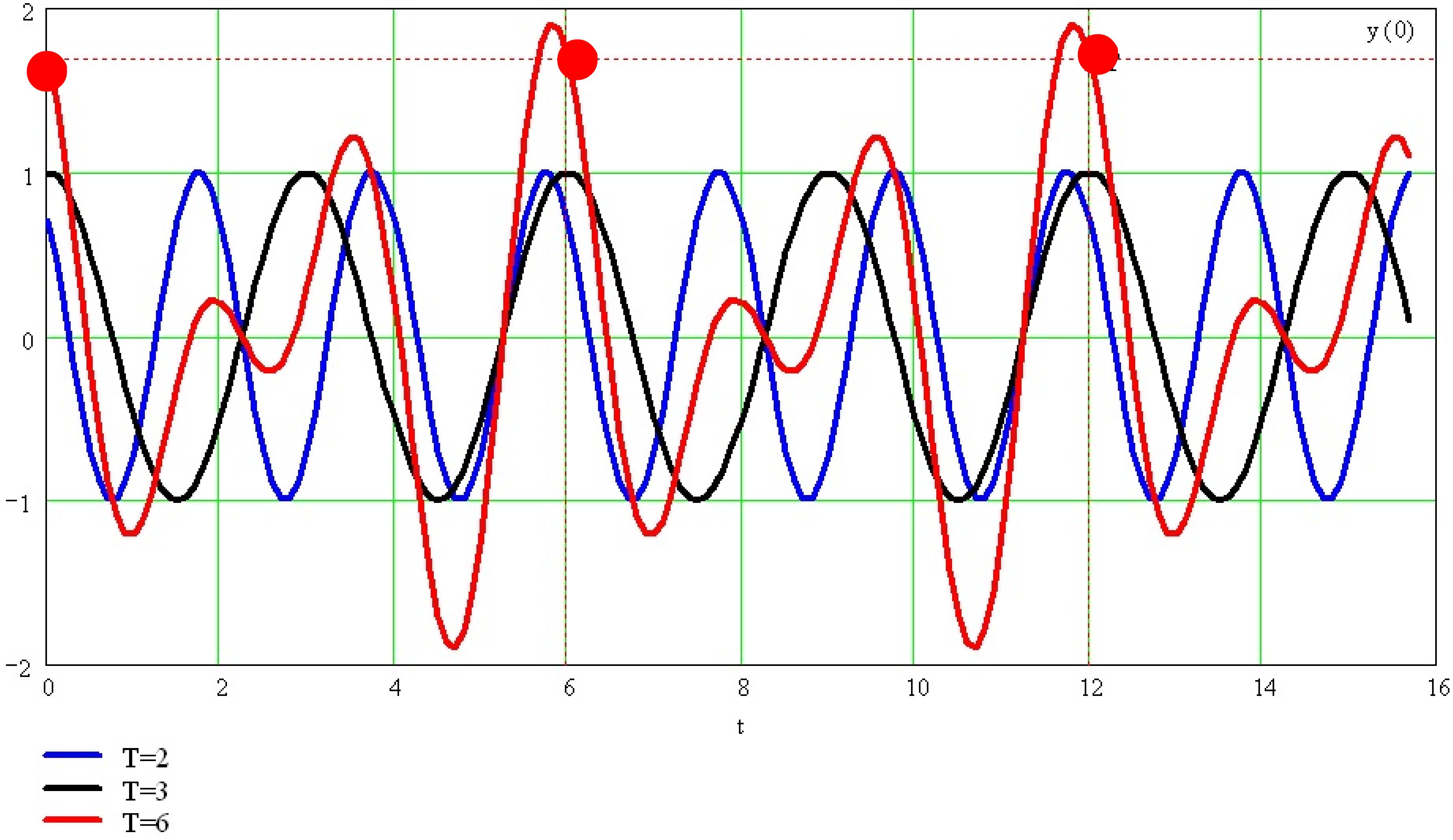
$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1}$$

la corriente resulta periódica, con una pulsación

$$\omega = \frac{n_1}{n}\omega_1 = \frac{n_2}{n}\omega_2$$

donde n es el mínimo común múltiplo de n_1 y n_2, es decir con un periodo

$$T = \frac{n}{n_1}T_1 = \frac{n}{n_2}T_2$$


y(0)
2
1
0
−1
−2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
t
T=2
T=3
T=6

Se puede entonces calcular la potencia media en la forma habitual

$$<P_d> = \frac{1}{T}\int_0^T i_1^2(t) R_1 dt$$

y demostrar, tras algunas manipulaciones con las funciones trigonométricas, que

$$<P_d> = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} i_{11}^2(t) R_1 dt + \frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} i_{12}^2(t) R_1 dt = <P_{d1}> + <P_{d2}>$$

cuando se cumple que $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1}$, con n_1 y n_2 enteros, la potencia media disipada ES la suma de las que se disiparían con cada generador por separado.

Si la relación ω_2/ω_1 es irracional (p.e. $\sqrt{2}$) la corriente resultante no es periódica, pero puede promediarse la disipación en un tiempo muy grande (periodo infinito) y obtenerse el mismo resultado. Con carácter general se puede decir que el valor medio de la potencia disipada en presencia de dos generadores de distinta frecuencia es la suma de los valores medios de las potencias que se disiparían en presencia de cada generador por separado.

Los anteriores resultados son generalizables al caso de un número cualquiera de generadores de frecuencias distintas.

Para el caso de que ambos generadores sean baterías el circuito queda

y la potencia disipada instantánea es constante y vale

$$\boxed{P_d = \left(\frac{V_1 - V_2}{R_1 + R_2}\right)^2 R_1}$$

y dado que las potencias disipadas para cada una de las baterías por separado serian

$$P_{d1} = \left(\frac{V_1}{R_1 + R_2} \right)^2 R_1 \qquad P_{d2} = \left(\frac{V_2}{R_1 + R_2} \right)^2 R_1$$

se tiene de nuevo $\quad P_d \neq P_{d1} + P_{d2} \quad$ **es decir que**

la potencia disipada total NO ES la suma de las que se disiparían con cada batería por separado